第9講 論理による推論 (3)
ー述語論理ー

- 述語論理とは

述語論理

- 命題論理
  - 命題記号と論理記号からなる最も基本的な論理
- 述語論理
  - 命題記号のかわりに、個体定数、個体変数、関数記号、述語記号などを導入し、命題の構造も扱える論理

論理式の基本構成 (1)

1. 個体定数 (individual constant)
   - 表現の対象となる個体 (オブジェクト) を直接表す記号
2. 個体変数 (individual variable)
   - 対象としている世界のいづれかのオブジェクトを表す記号
3. 関数記号 (function symbol)
   - オブジェクト間の関数関係を表す記号
4. 述語記号 (predicate symbol)
   - オブジェクトの性質や、オブジェクト間の関係を表す記号
5. 限定記号 (quantifier)
   - 個体定数の考慮すべき範囲を表す記号
     - 全称記号 (∀): すべての〜について
     - 存在記号 (∃): 少なくてもひとつの〜について

論理式の基本構成 (2)

6. 論理記号 (connective)
   - 論理式を結合する記号である。
     - 否定 (¬): 〜でない
     - 連言 (∧): かつ
     - 選言 (∨): または
     - 含意 (→): 〜ならば〜である
     - 同値 (⇔): 同一である

項の定義

- 定数、変数、関数は項を形成する
  - 定数記号は項である
  - 変数記号は項である
  - fが関数記号であり、t1, t2, ,,,, tnが項であれば、
    f (t1, t2, …., tn) も項である。

素論理式の定義

- 述語記号は素論理式 (atomic formula) を形成する
  - pが述語記号であり、t1, t2, …., tnが項ならば、p (t1, t2, …., tn) は素論理式である

論理式 (well formed formula) の定義

- 素論理式は論理式である
- Pが論理式であれば、¬ Pは論理式である
- Pが論理式であり、xが変数であれば、(∀x) Pと (∃x) Pは論理式である
- PとQが論理式ならば、以下のものは論理式である。
  - P ∧ Q
  - P ∨ Q
  - P → Q
  - P ⇔ Q
- 変数
  - 束縛変数
    - 限定記号がついた変数
  - 自由変数
    - 限定記号がつかない変数

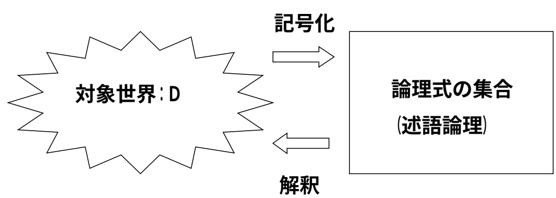
述語論理の解釈

- 論理式の解釈 (interpretation)
  - 定数記号の解釈
    - 対象とする世界の領域Dの中のひとつの要素に対応付ける
  - 関数記号の解釈
    - D × D ×….. × D → D なる関数に対応させる
  - 述語記号の解釈
    - D × D ×….. × D → {T, F} なる述語に対応させる
- 解釈は変数記号Xについては何も対応付けはおこなわない
- 変数記号に対しては、D中のひとつの要素に対応させる変数割り当て関数wを用意する

述語論理の解釈の例

- 論理式 p(f(a))
  - 定数記号
    - a
  - 関数記号
    - f
  - 述語記号の解釈
    - p
- 解釈
  - D = {太郎、一郎}
  - a を「太郎」、f を「父」、pを「親である」という関係とする
  - 現実関係
    - 「太郎の父が一郎である」という関数関係が成り立つ
  - 上記の場合には、論理式 p(f(a))は真となる

対象世界と論理式の関係



充足可能性とモデル

- ある解釈Iと変数割り当てwにおいて、論理式Pが真になることを

  $\models_{I,w}$ P

  とかく。
- 論理式P中ですべての変数に限定記号が付いているならば、Pの真偽値は変数割り当てwに関わりなくIだけで決定できる。解釈Iで論理式Pが真となることを

  $\models_{I,}$ P

  とかく。
- その場合のIをPのモデル (model) という。

恒真 (トートロジー) と充足不能

- 恒真 (トートロジー)
  - 論理式がどのような解釈においても真となる
- 充足不能
  - 論理式がどのような解釈においても偽となる
- 論理式Pが恒真であることを

  $\models$ P

  とかく

論理的帰結 (logical consequence)

- 論理式P1,P2, …, Pnに対して、P1,P2, …, Pn全部を真とするような解釈Iや変数割り当てwに対して、別の論理式Qが真となるとき、これを

  $\{P1, P2, \ldots, Pn\} \models_{I, w} Q$

  とかく。
- P1,P2, …, Pnを真とするようなどんな解釈や変数割り当てに対しても、Qが真となるとき、QはP1,P2, …, Pnの論理的帰結であるといい、

  $\{P1, P2, \ldots, Pn\} \models Q$

  とかく。これは、P1,P2, …, Pnという性質/関係が成り立つ世界では、必ずQなる性質/関係が成り立つことを示している。