第8講 論理による推論 (2) ー命題論理ー

- 命題論理の証明

推論

- 推論 (reasoning)
  – ある論理式から別の論理式を導き出すこと
- 公理系
  – 公理 (いくつかの無条件に正しい論理式) を決めておき、推論規則 (inference rule) を用いて、真である論理式を作り出していく体系

公理系の例 (Hilbert)

- 公理
  – $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
  – $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
  – $(\neg P \rightarrow Q) \rightarrow ((\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow P)$
  – $P \land Q \rightarrow P$
  – $P \land Q \rightarrow Q$
  – $P \land (Q \rightarrow P \land Q)$
- 推論規則
  – モーダスポネンツ (Modus Ponens)
  – 2つの論理式PとP→QからQを導く

$$\frac{\begin{array}{l} P \\ P \rightarrow Q \end{array}}{Q}$$

証明 (proof)

- 証明
  – 論理式集合{P1, P2, …., Pn}が与えられたとき、この中の論理式と公理にモーダスポネンツを次々適用したとき、論理式系列B1, B2, …, Bnが得られ、論理式Q (=Bn) に至るとき、この論理式の系列を{P1, P2,…,Pn}からQへの証明という。
  – {P1, P2, …, Pn}からQへの証明があるとき、{P1, P2, …, Pn}からQへ証明可能であると言い、
    {P1, P2, …, Pn} |- Q
    とかく。

完全性定理

- 命題論理の公理系における論理的帰結と証明可能の関係
  – {P1, P2, …, Pn} |= Q ならば
    {P1, P2, …, Pn} |- Q (完全性)
  – {P1, P2, …, Pn} |- Q ならば
    {P1, P2, …, Pn} |= Q (健全性)

融合 (導出) 論理

- 証明の代表的な方法
  1. {P1, P2, …, Pn} の個々の論理式を節の集合形式に変換する
  2. 証明したい論理式の否定 ¬Qを節の集合形式に変換する
  3. 2つの節を組み合わせて融合 (導出) 節を作る
  4. 空であるような導出 (融合) 節が作られたとき、
     {P1, P2, P3, …., P4} |= Q
     が証明できたことになる

節形式への変換

- 任意の命題論理の論理式の変換
  1. P ⇔ Q を　(P → Q) ∧ (Q → P)　に変換
  2. P → Q を　¬P∨Q　に変換
  3. ¬¬P を P　に変換
  4. ¬ (P ∧ Q)　を　¬P ∨ ¬Q に変換
  5. ¬ (P ∨ Q)　を　¬P ∧ ¬Q に変換
  6. (P ∧ Q) ∨ R を　(P ∨ R) ∧ (P ∧ Q)　に変換

節形式への変換の例

- 節
  - リテラルの論理和のみから構成される論理式
  - ci = pi1 ∨ pi2 ∨……∨ pin
- 連言標準形への変換
  - q = c1 ∧ c2 ∧ ….. ∧cn (連言標準形)
  - ci = pi1 ∨ pi2 ∨……∨ pin
- 論理式　p → ¬ (q → r) の変換
  1. ¬p ∨ ¬ (¬q ∨ r)　(規則2の適用)
  2. ¬p ∨ (¬¬q ∧ ¬r)　(規則5の適用)
  3. ¬p ∨ (q ∧ ¬r)　(規則3の適用)
  4. (¬p ∨ q) ∧ (¬p ∨ ¬r)　(規則4の適用)
- 節集合
  - {{¬p, q}, {¬p, ¬r}}

節の融合 (導出)

1. 2つの節C1, C2があって、C1にリテラルLが含まれており、C2にリテラル¬Lが含まれているとする。
2. このとき、双方の節からLと¬Lを取り除き、その他の要素の和をとったものを融合節 (導出節) という。

- C1とC2の融合節 (導出節) をCとするとき、
  {C1, C2} |- C
  となる。

空節の融合 (導出)

- 融合節 (導出節) を次々に作っていき、空節 (■) が作られたとき、証明は成功