第7講 論理による推論 (1) ー命題論理ー

- 論理
- 命題論理

論理とは

- 人間が物事を考え、それを論じるときには論理を用いる
- 論理学
  – 論じ方の表現法や論じ方そのものの正しさを議論
  – アリストテレスなどのギリシャ時代が起源
- 記号論理学 (数理論理学)
  – 記号による論や論じ方の表現とそのための厳密な論理の体系
  – BooleやFregeが基礎を築いた

記号論理学 (数理論理学)

- 命題論理
- 述語論理
- 様相論理
- 非単調論理

命題論理

- 命題
  – 論じる対象の世界のことがら、事象、概念などに関して述べている文
  – 個々の命題に対して、真偽値が与えられる
  – 簡単な文
    - 命題記号で表現
    - p:「熱がある」
    - q:「腹痛がある」
    - r:「風邪である」

命題論理

- 命題論理
  – できるだけ簡単な自然言語の文に分解し、それらの文の間の関係を論理記号で結合して論理式として表現
  – 論理式
    - $(p \land q) \rightarrow r$
    - 「熱があって腰痛ならば、風邪である」
  – 構文
    - 論理式を構成するために、どのような記号を並べればよいかを決める
  – 意味
    - 構文にしたがって並べられた記号の列をどのような知識に対応させるかを決める
  – 証明
    - ある論理式集合から別の論理式の集合を導き出すプロセス

命題論理の構文 (その1)

- 命題論理の構成要素
  – 論理定数
    - true と false
  – 命題記号
    - 簡単な文を表す記号。 p,q,r,s,…などの小文字のアルファベットで表す
  – 論理記号
    - $\land$ (連言)、$\lor$ (選言)、$\neg$ (否定)、$\rightarrow$ (含意)、$\Leftrightarrow$ (同値)
- 論理式
  – 論理定数は論理式である
  – 命題記号は論理式である
  – Pが論理式であれば、$\neg$Pは論理式である
  – PとQは論理式ならば、以下のものも論理式である

$$P \land Q,\ P \lor Q,\ P \rightarrow Q,\ P \Leftrightarrow Q$$

命題論理の構文（その2）

- 命題論理の例
  - p ∧ ¬ (q ∨ ¬r)
    - 論理式
  - ∧p ∨ q
    - 論理式ではない
- リテラル
  - 単独の命題記号 (p) または、それに否定記号をつけたもの
  - 正リテラル
    - p
  - 負リテラル
    - ¬p

命題論理の意味

- 解釈
  - 論理式と対象としている世界とを関連付けること
- 命題記号が表現している文
  - 対象としている世界で成り立つ
    ↓
    命題記号に真 (T) を割り付ける
  - 対象としている世界で成り立たない
    ↓
  命題記号に偽 (F) を割り付ける

命題論理の意味

- 論理式Pの真偽値
  - Pが論理定数trueやflaseである場合には、その真偽値はそれぞれ真 (T) と偽 (F) である
  - Pが単独の命題記号である場合には、Pの真偽値はその命題記号の真偽値と同じである
  - Pが他の命題記号 (p) の否定 (¬) であるときには、Pの真偽値はpの真偽値の逆になる

命題論理の意味

- 論理式Pの真偽値
  - Pがp∧q, p∨q, p →q, p ⇔q であるときには、真偽値表に基づいてPの真偽値を決める

p	q	p∧q	p∨q	p → q	p ⇔ q
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

命題論理の意味

- 論理式Pの真偽値
  - Pが(p∧q) → r であるときには、真偽値表に基づいてPの真偽値を決める

p	q	r	p∧q → r
T	T	T	T
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

恒真（トートロジー）と充足不能

- 論理式の真偽値
  - 解釈によって定まる（真にも偽にもなる）
- 恒真
  - どんな解釈でも論理式が真になること
  - (p → q) ⇔ (¬ p ∨ q) ：恒真
- 充足不能
  - どんな解釈をしても論理式が偽になること
  - p ∧ ¬p : 充足不能
- 充足可能な論理式
  - 充足不能ではない論理式
- 論理式は、解釈によって真偽値が変化する

論理的帰結 (logical consequence)

- 論理式の集合{P1, P2, …., Pn} と単一の論理式Qがあるとする。
- P1 ∧P2∧….∧Pnが真となる解釈に対しては Qが必ず真となるとき、Qは{P1, P2, …, Pn}の論理的帰結であるといい、以下のように書く。

  $\{P1, P2, \ldots, Pn\} \models Q$
- P1, P2, …., Pnが成り立つ世界では、必ずQが成り立つことを意味する。